9-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз теңдеулерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз теңдеулерді интегралдау жолдарымен танысу.
Негізгі сөздер: Фундаменталь шешімдер жүйесі, базис, Эйлер әдісі, квазикөпмүшелік.

Енді тұрақты коэффициентті біртексіз теңдеуді қарастырайық:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(x) \qquad (16)$$

Мұнда a_i-сандары нақты, ал $f(x)$- функциясы кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында үздіксіз деп алынады.

Өткен параграфта көрсетілгендей, біртексіз сызықты теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін жалпы жағдайда тұрақтыларды вариациялау арқылы анықтауға болады. Кейбір жағдайларда $f(x)$ функциясының түріне байланысты шешімді алгебралық амалдардың көмегімен интегралсыз-ақ табуға болады.

Айталық, $f(x)$ функциясы квазикөпмүшелік түрде берілсін, яғни

$$f(x)=P_m(x)e^{\alpha x} \qquad (17)$$

Мұнда $P_m(x)$-дәрежесі m-ге тең көпмүшелік:

$$P_m(x)=p_0x^m+p_1x^{m-1}+...+p_m \qquad (18)$$

Сонымен,

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=P_m(x)e^{\alpha x} \qquad (19)$$

Дербес шешімді құрудың екі жағдайы қарастырылады.

1^0. α-саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес. Бұл жағдайда дербес шешім мына түрде ізделінеді:

$$y_1=Q_m(x)e^{\alpha x} \qquad (20)$$

Мұнда

$$Q_m(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+...+q_m \qquad (21)$$

Осы (20) өрнекті (19) теңдеуге қойып, алдын ала $e^{\alpha x}$ функциясына қысқартып, x-тың әртүрлі дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіретін болсақ, $q_0,q_1,...,q_m$-коэффициенттері төмендегідей теңдеулерден бірмәнді түрде анықталады:

$$\left.\begin{array}{l} q_0P(\alpha)=p_0, \\ q_0C_m^1P'(\alpha)+q_1P(\alpha)=p_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_0C_m^mP^{(m)}(\alpha)+...+q_{m-1}P'(\alpha)+q_mP(\alpha)=p_m \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Мұнда $P(\alpha)\neq 0$, өйткені α-саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес.

2^0. α-саны сипаттаушы теңдеудің k-еселікті түбірі болсын, яғни

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=...=P^{(k-1)}(\alpha)=0, P^{(k)}(\alpha)\neq 0 \qquad (23)$$

Бұл жағдайда дербес шешім

$$y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \qquad (24)$$

түрінде ізделінеді. Мұнда да (24) өрнекті (19) теңдеуге қоятын болсақ, $q_0, q_1, ..., q_m$ - сандарын табу үшін төмендегідей алгебралық теңдеулер аламыз:

$$\left.\begin{aligned} & q_0 C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_0, \\ & q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_1, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & q_0 C_{k+m}^{k+m} P^{(k+m)}(\alpha) + ... + q_m C_k^k P^{(k)}(\alpha) = p_m \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Мұнда $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ болғандықтан, барлық коэффициенттер бір мәнді түрде анықталады.

Ескерту. Егер (16) теңдеудің оң жағы тригонометриялық квазиполином түрінде берілсе, яғни

$$f(x) = P_m^{(1)}(x) e^{\alpha x} \cos bx + P_m^{(2)}(x) e^{\alpha x} \sin bx$$

түрінде берілсе, онда $\cos bx$ және $\sin bx$ функцияларын Эйлер формуласы бойынша

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

түрінде жазып, алдыңғы жағдайға келтіруге болады.

Мысалдар.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Сәйкес дербес шешімдер: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$.

Жалпы шешім: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Дербес шешімдер: $y_1 = e^{2x} \cos x, y_2 = e^{2x} \sin x$.

Жалпы шешім: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ немесе $(\lambda - 1)^3 = 0$. Осыдан $\lambda_{1,2,3} = 1$. Жалпы шешім: $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

4. $y'' - 9y = 5e^{2x}$. Сипаттаушы теңдеу: $\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Біртексіздің дербес шешімін: $\tilde{y} = Ae^{2x}$ түрінде іздейміз. Осыдан $A = -1$ болатынын көреміз. Сондықтан, біртексіз берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x}$$

функциясы болады.